



TITLE:

# 経度依存性太陽風の逆解法(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

桜井, 健郎

---

CITATION:

桜井, 健郎. 経度依存性太陽風の逆解法(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 476: 53-80

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103321>

RIGHT:

## 経度依存性太陽風の逆解法

京大 工学部航空 桜井健郎

はじめに

よく知られているように（例えば文献1）、太陽に向けて真直ぐに20万Kmも上昇すると、惑星間空間に立つ（いや、漂う）事が出来る。そこは1立方cmあたりに数個の分子しかない極超高真空の世界である。しかし、長さの単位を100万Kmにし、磁場の効果を考慮に入れてモデル化すると、そこで起っている事柄は飛行機のまわりでごく普通に起っている事柄とよく似て来る。一見“流体”離れした天体现象が、ぬるぬると“流体”臭い出来事に見えて来るのである。

ここでは、そのような例として、経度依存性太陽風の逆解法について考える。

太陽風とは、太陽から準定常的に流れ出しているプラズマ流の事である。地球軌道附近でのマッハ数は約8前後で、上でほのめかしたように、電磁流体力学の近似で取り扱う事

が出来る。人工衛星による観測(図1,2)から、(1)太陽風には太陽と共に回る準定常的な流れ模様がある事、(2)流れ模様は太陽からの距離と共に変化し、特に、地球軌道の外側には準定常な衝撃波が見られる事、(3)衝撃波は2波1組で現われ、流れ模様(図3)の検討から、内向き波と外向き波に分類出来る事が知られている。

(1)-(3)の観測事実を理解する為に、回転円盤の周縁部に空気発射銃を並べ、静止した管に次々と気塊を射出する事(図4)を考えて見よう。管の中の流れは気体力学でよく知られた非定常一次元流れである。流れには音波が現われるが、流体粒子と相対的に内向きに伝わるものと外向きに伝わるものの2種類がある。夫々の音波は、非線形の相互作用により、内向き及び外向きの非定常の衝撃波を形成する。静止した管をあらゆる方向に並べ、回転円盤上の空気銃の性能を夫々時間的に変らないようにすると(図5)、管内の流れの全体は円盤と共に回る流れ模様を見せてくれる。そして、その模様には内向き及び外向きの衝撃波が現われる。Hundhausen 等に始まる一次元非定常モデル(文献2)は上の考察を定量的にしたもので、太陽風の準定常パターンを、特に衝撃波の現われる様子を理論的に再現する事に成功した。只、このモデルでは流れの多次元性の影響を取り入れる事が出来ない。事実、

このモデルと観測とを詳しく比較すると、流れの多次元性に基因すると思われる不一致が見られる。

流れの多次元性の効果を明らかにする為、以下では、太陽風を太陽と共に回る座標系について定常な二次元プラズマ流と考える。実際の太陽風は3次元流れであるが、3次元の数値計算(文献3)の例を見ると、緯度方向の速度成分は無視出来る程度に小さい。それ故、流れ模様の気体力学的特徴を調べるには二次元流れとして充分なのである。話をもっと厳密にする為、之からは、黄道面について対称な太陽風の黄道面上の流れ模様を考える。そうすれば、対称性により、流れの基礎方程式は黄道面内の成分だけで表わす事が出来る。

## 第1章 基礎方程式

太陽風を非粘性、非熱伝導、完全電導性の理想気体とし、磁場の作用の下で太陽からポリトロピックに流れるものとする。回転座標系について定常な太陽風の基礎方程式は以下のようになる：

$$(1) \frac{\partial(\nu_r \rho r^2)}{\partial r} - N_2 \frac{\partial(\rho r^2)}{\partial \varphi} = -N_1 r \frac{\partial(\rho \nu_\varphi)}{\partial \varphi},$$

$$(2) \left\{ \nu_r \frac{\partial}{\partial r} - N_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \nu_r + \frac{1}{M^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{j B_\varphi}{M_A^2 \rho r} \\ = - \frac{N_1 \nu_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial \nu_r}{\partial \varphi} + \frac{N_1^2 \nu_\varphi^2}{r} - \frac{1}{M_g^2 r^2},$$

$$(3) \left\{ v_r \frac{\partial}{\partial r} - N_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} (v_\varphi r) + \frac{1}{N_1 M^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{j B_r}{N_1 M_A^2 \rho} = -N_1 v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(4) \frac{\partial (B_r r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (B_\varphi r)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(5) \frac{\partial (v_r B_\varphi r)}{\partial r} - N_2 \frac{\partial (B_\varphi r)}{\partial \varphi} = N_1 \frac{\partial (r v_\varphi B_r)}{\partial r},$$

$$(6) p = \rho^\gamma,$$

但し

$$(7) j = \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r},$$

$$(8) \begin{cases} r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_0}, & v_r = \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{v}_0}, & v_\varphi = \frac{\tilde{v}_\varphi}{N_1 \tilde{v}_0}, & \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}, \\ B_r = \frac{\tilde{B}_r}{\tilde{B}_0}, & B_\varphi = \frac{\tilde{B}_\varphi}{\tilde{B}_0}, & p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0}, \end{cases}$$

$$(9) N_2 = \frac{\tilde{\Omega}_0 \tilde{r}_0}{\tilde{v}_0}, \quad \frac{1}{M^2} = \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0 \tilde{v}_0^2}, \quad \frac{1}{M_A^2} = \frac{\tilde{B}_0^2}{\mu \tilde{\rho}_0 \tilde{v}_0^2}, \quad \frac{1}{M_G^2} = \frac{\tilde{G} \tilde{M}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{v}_0^2},$$

で、 $(r, \theta, \varphi)$ は太陽と共に角速度 $\Omega_0$ で回る回転球座標系、 $(v_r, v_\theta, v_\varphi)$ は静止球座標系についての速度成分、 $\rho$ は密度、 $p$ は圧力、 $(B_r, B_\theta, B_\varphi)$ は磁場、 $G$ は重力常数、 $M_0$ は太陽質量、 $\gamma$ はポリトロピック係数、 $\mu$ は透磁率、添字0及び文字の上の波形記号は標準位置及び次元を有する元の物理量を表わす。無

次元パラメター  $N_1, N_2, M, M_A, M_G$  は標準位置での値により見積もられて居り、 $N_1$  は経度方向の速度成分と動径方向の速度成分の比、 $N_2$  は座標系の回転に対応する経度方向の速度成分と動径方向の速度成分の比、 $M$  はマッハ数に  $\sqrt{g}$  をかけたもの、 $M_A$  はアルヴェーン数、 $M_G$  は動径方向の速度成分と脱出速度の比である。

既に述べたように、上の式では黄道面についての対称性を仮定している。それで、上式は黄道面内の量だけで表わされているのである。また、ポリトロピックの式 (6) はエネルギー式に代るものである。弱い衝撃波に話を限れば、衝撃波を通してのエントロピーの跳びは圧力の跳びの3次の微少量なので、ポリトロピックの式は十分に良い精度で適用出来る。

$\tilde{r}_0$  を太陽半径の30倍とすると、観測に基づいて

$$(10) \quad N_1 \ll 1, \quad M^{-2} \ll 1, \quad M_A^{-2} \ll 1, \quad M_G^{-2} \ll 1,$$

の関係のある事が解る。この関係により、(1), (2), (3), (5) の右辺を無視し、簡単化された式を (1'), (2'), (3'), (5') とする。ここで無視した項は残した項と同じ階数の微分しか含まない。それ故、流れの中に衝撃波が現われても、上の簡単化は困難なく適用出来る。この事は、衝撃条件が (1) - (5) の積分により求まる事から理解出来る。

(4) と (5') を組合せて、積分常数を適当に選ぶと、

$$(11) \quad v_r B_\varphi + N_z r B_r = 0,$$

を得る。之は回転系に於て磁場と流れ場とが平行である事：

$$(12) \quad B_r = \alpha \rho v_r, \quad B_\varphi = -\alpha \rho N_z r,$$

に対応する。ここで $\alpha$ は $r$ 及び $\varphi$ の函数である。(12)を(4)に入れ、(1)を考えに入れると

$$(13) \quad \left\{ v_r \frac{\partial}{\partial r} - N_z \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \alpha = 0,$$

を得る。(13)は $\alpha$ が流線に沿って一定であることを示すので、基準円 $r=1$ の上で $\alpha$ が一定であれば、 $\alpha$ は流れの場合全てで一定になる。今後は、簡単の為、そのような場合だけを考える。第3章で述べるように、 $\alpha$ は衝撃波を横切っても変らない。 $\alpha$ が一定である事は、だから、衝撃波が現われても変らない。

(2) と (3) から

$$(14) \quad \left\{ v_r \frac{\partial}{\partial r} - N_z \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \cdot \left( \frac{v_r^2}{2} - N_z N_z r v_\varphi + M^2 \int \frac{p}{\rho} dp \right) = 0,$$

を得るが、之は小カッコ内の量が流線に沿って変らない事を示している。(14)の積分常数、 $\alpha$ 、 $v_r$ 、 $\rho$ を前もって与えられたものとする。 (6), (12), (14) を解いて  $B_r$ ,  $B_\varphi$ ,  $v_\varphi$ ,  $p$  を求める事が出来る。

(6) と (12) を (2) に代入すると

$$(15) \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} - N_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_r = - \frac{r \rho^{r-2}}{M^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ - \frac{\alpha^2 N_2}{M_A^2} \left\{ \frac{\partial (N_2 r^2 \rho)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial \varphi} \right\},$$

を得る。(10)の関係により、 $r$ が1の程度ならば右辺は無視出来る。之は筆者の提唱したQRH近似(文献4)に相当する。 $r$ が大きくなって来ると、 $r^2$ がかかっているのので、右辺の中カッコ内の第1項が左辺と同程度になって来る。この項を残して置けば、 $r$ が1程度の時にはQRH近似と同様になり、 $r$ が大きくなってても(15)式右辺の効果を考慮に入れる事が出来る。そこで、(15)の近似式として

$$(16) \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} - N_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_r = - \frac{\alpha^2 N_2}{M_A^2} \cdot \frac{\partial (N_2 r^2 \rho)}{\partial r},$$

を用い、これからは(17)及び(16)を $v_r$ 及び $\rho$ に対する基礎方程式とする。

## 第2章 特性座標の導入, 特性面での解法

新しい変数:

$$(17) \hat{v}_r = v_r, \quad \hat{\rho} = \rho r^2,$$

を用いると、(16)及び(17)は

$$(18) 0 = \hat{v}_r \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} - N_2 \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \varphi} + \hat{M}^2 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r},$$



$$(19) \quad 0 = \hat{\rho} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} + \hat{v}_r \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r} - N_2 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi},$$

になる。但し  $\hat{M} = \alpha N_2 / M_A$  である。上の2式は準線形の連立1階偏微分方程式であるから、標準的手法を適用して次の特性関係を得る：

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{各特性曲線 : } \frac{dr}{d\varphi} = \frac{-\hat{v}_r \pm \hat{M} \hat{\rho}^{\frac{1}{2}}}{N_2} \text{ に沿って} \\ \omega_{\pm} = \hat{v}_r \mp 2\hat{M} \hat{\rho}^{\frac{1}{2}} \text{ が夫々不変である。ここで上下の符号} \\ \text{は夫々の式で同順である。} \end{array} \right.$$

解析的特性曲線法（文献5）の考えに沿って  $\omega_+$  及び  $\omega_-$  を独立変数とし  $r$  及び  $\varphi$  を従属変数とすると、非線形の式(18)及び(19)は線形の式：

$$(21) \quad 4N_2 \frac{\partial r}{\partial \omega_-} = -(\omega_- + 3\omega_+) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_-},$$

$$(22) \quad 4N_2 \frac{\partial r}{\partial \omega_+} = -(3\omega_- + \omega_+) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_+},$$

に変換される。上の式から  $r$  を消去すると、リーマンの微分方程式（文献6）：

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_- \partial \omega_+} = \frac{1.5}{\omega_- - \omega_+} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_-} - \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_+} \right),$$

を得る。又、 $(\omega_+, \omega_-)$ -面から  $(r, \varphi)$ -面への変換のヤコービヤ

ンは

$$(24) \quad J = \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(\omega_+, \omega_-)} = \frac{\omega_- - \omega_+}{8N_z^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_+} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_-},$$

である。

以上により我々の問題は与えられた初期条件の下で (23) を  $\varphi$  について解き, (21) 及び (22) から  $r$  を求める事に帰せられた。(23) はリーマンの解法により解けるし, (21) 及び (22) は線形なので上の問題は一見容易に見える。しかし、遷音速流れのホドグラフ解 (文献 7) の場合と同様に, (1)  $(\omega_+, \omega_-)$ -面から  $(r, \varphi)$ -面への写像を調べ, 特に, ホドグラフ解に於ける限界線及び分岐線に対応する特異線の存在を明らかにする事、そして, それらを解法上どのように処理するかを見極めて置く事、(2)  $(r, \varphi)$ -面で与えられた初期条件を  $(\omega_+, \omega_-)$ -面での初期条件に直す事をあらかじめ検討して置かねばならぬ。

簡単の為に標準円  $r=1$  の上で  $\rho$  は  $\varphi$  について一定、 $\psi_r$  は周期  $2\pi$  (図 6) の周期函数であるとしよう：

$$(25) \quad \begin{cases} \hat{\rho}(r=1) = \rho_0 \\ \hat{\psi}_r(r=1) = \psi_0 + \psi_1 \sin 3\varphi_{ow} \end{cases}$$

但し  $\varphi_{ow}$  は  $r=1$  に於ける  $\varphi$  である。そして、 $\hat{\psi}_r$  は点 2 に於て最大になり, 1 及び 1' に於て最小になるものとする。この初期条件は、(20) により、 $(\omega_+, \omega_-)$ -面に於ける線分  $\overline{12}$  上の各

件:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_- = \omega_+ + 4\hat{M}\rho_0^{\frac{1}{2}} \text{ の上で} \\ \varphi_{ow} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\pi - \sin^{-1} \frac{\hat{v}_r - v_0}{v_i}), & \text{圧縮側} \\ \frac{1}{3}\{(-2\pi) + \sin^{-1} \frac{\hat{v}_r - v_0}{v_i}\}, & \text{膨脹側} \end{cases} \end{array} \right.$$

になる (図 7)。但し膨脹側での  $(-2\pi)$  は  $(r, \varphi)$ -面の点 1' の左側に対してのみ加えるものとする。対応する点は夫々の面で同じ数字で表わされているから両面の対応関係を細かく説明する必要はないであろう。どうしても言わねばならぬ事は次のようである。: (1) 後に述べるように、 $\omega_- = \omega_+$  の直線は物理面での無限遠点に対応する。(20) から解るように、物理的に許されるのはこの直線 (INF) の左側である。直線 (INF) に平行な直線の上では  $\hat{\rho}$  が一定であり、直線 (INF) からの距離が減るにつれて  $\hat{\rho}$  も減る。初期直線  $\overline{12}$  の左側での  $\hat{\rho}$  は初期値より大きい。球対称流れでは、連続の関係により、 $\hat{\rho}$  は  $r$  について一定である。上の領域は、流れの経度依存性により、球対称流れよりも圧縮された領域である。同様に  $\overline{12}$  の右側は球対称流れよりも膨脹した領域である。膨脹側では、通常の膨脹流れに於けるように、物理面に於ける特性曲線が切り合ったり包絡したりするような事はない。そして、流れ

は $r$ が増すにつれてより"滑らか"になる。(2) 領域 2643, 1357, 3584 は、 $(\omega_+, \omega_-)$ -面 (特性面) では他の領域と重複しているが、物理面にそのような重複はない。それ故、単純に考えると、ここでは特性面と物理面の間の一対一の対応はくずれている。このような状況は、幸いな事に、既に遷音流れのホドグラフ解の中で取り扱われて居る。そして見かけ上多価の対応関係は次のように実質上一価の対応関係に解釈し直す事が出来る。例えば特性面の領域 6432 は、線分  $\overline{26}$  を境に領域 2612 から折りもどされ、線分  $\overline{23}$  を境に領域 213 から折りもどされたものと考えられる。領域 2612 及び 213 を第1葉目の領域とすれば、領域 6432 は第2葉目の領域という事になる。線分  $\overline{26}$  及び  $\overline{23}$  は第1葉目から第2葉目への折り目に当たる。特性面に於ける流線は折り目の所で方向が不連続に変るが、物理面に於いては折り目に対応する曲線を通過する際流線は方向も含めて連続である。この折り目は遷音速流れのホドグラフ解に於ける分岐線に当たり、流れの周期性によって特性面の初期直線  $\overline{12}$  が有限である事から"自然"に生じたものである。特性面を用いての解法には、物理面での写像曲線を通る際に流線が連続であるから、この折り目の存在は障害にならない。(1) で注意したように点6 及び 7 は無限遠点に相当する。図7の領域 6432 及び 7135 は図6

では無限遠まで広がった領域に対応し、その中間に扇状域 435 が残される。この扇状域は、図 7 では、第 2 葉の領域 6432 及び 1357 から折りもどされた第 3 葉の領域 4358 に対応する。ここでの説明から解るように、之以上の折りもどしは起らない。(3) (2) に於いては、遷音速流れのホドグラフ解に於ける分岐線に対応して、特性面は折れもどるが物理面は滑らかな場合を考えた。それとは逆の場合、つまりホドグラフ解に於ける限界線に対応して、特性面は滑らかだが物理面が折れもどるような場合もある。厄介な事に、そのような特異線の位置は、(2) の場合とは異なり解いて見て始めて解る。また、そのような特異線のある物理面内の流れは物理的に許されない。しかし、解析的特性曲線法の手法によれば、この特異線の出現を衝撃波の出現として解釈する事が出来る：この特異線はヤコービアン  $J$  が 0 になる曲線であるが、(24) により、 $\partial\varphi/\partial\omega_+$  或は  $\partial\varphi/\partial\omega_-$  が 0 になる曲線と同等である。そのような曲線の最も簡単なものとして、 $\partial\varphi/\partial\omega_+$  が 0 になる曲線：

$$(27) \quad \omega_- - \eta_0 = \alpha_0 (\omega_+ - \xi_0)^2$$

を考える。但し、 $\alpha_0$  は大域的な流れ模様から定まる。上の条件の下で特性面内の点； $(\xi_0, \eta_0)$  附近の解を求めると、次のような級数解を得る：

$$(28) \quad \varphi - \varphi_0 = -\frac{2}{3}(\eta_0 - \xi_0)(\omega_- - \eta_0) + (\omega_+ - \xi_0) \left\{ \frac{\alpha_0}{3}(\omega_+ - \xi_0)^2 - (\omega_- - \eta_0) \right\} \dots,$$

$$(29) \quad 4N_2(r - r_0) = -(3\xi_0 + \eta_0)(\varphi - \varphi_0) - 2(\eta_0 - \xi_0)(\omega_+ - \xi_0) \left\{ \frac{\alpha_0}{3}(\omega_+ - \xi_0)^2 - (\omega_- - \eta_0) \right\} \dots.$$

上の解に対応する特性面及び物理面を図8及び図9に示す。  
 図9から解るように、物理面の流線は特性線の左枝で折りも  
 じされて第2葉目に入り、右枝で折りもじされて第3葉目に入  
 る。 $(\xi_0, \eta_0)$ に対応する $(\varphi_0, r_0)$ を尖端とするカスプ状の特  
 異線にかこまれた物理面は3葉になっている。この物理面に  
 於て、第1葉上の流線と第3葉上の流線が交叉する点で、第  
 1葉から第3葉へ跳び移れば物理面は流れの場全域で1葉に  
 なる。第3章で示すようにこの跳び移りは、点 $(\varphi_0, r_0)$ の附  
 近で、弱い衝撃波の条件を満足する。同様な考察は $\varphi$ が  
 $\omega_-$ になる曲線についても行なえる。

以上を基にすると、特性面での解法の手順は次のよう  
 になる：

(A) 物理面に於ける初期条件に対応して図7のような特性面  
 を作図する---今後はこの図を作業図と呼ぼう。この作業図は、  
 (2)で説明したように、3葉から成っている。

(B) 作業図上の各点に対応する $\varphi$ は、(23)及び与えられた初  
 期条件を基に、リーマンの式を用いて求め、 $r$ は(21)及び

(22) を積分して求まる。よく知られているように、リーマンの式に於いては各点について単積分を計算すればよい。ここでは差分法に於けるような数値的不安定は現われない。作業図上の流れは、あらかじめ場所の解、ている折り込み線〔2〕を参照せよ〕を除けば、致る所で連続である。

(C) (B) により作業図上の解が求まれば、それを読みかえて、物理面に於ける流れ模様が出せる。

(D) (C) により求めた流れ模様には、(3) で述べたように、カスプ状の折り込み線が現われて物理面が3葉になる事がある。そのような場合には、 $\omega_+$  或は  $\omega_-$  が一定であるような直線に沿って作業図上の  $(\varphi, r)$  を再検討する。物理面に於ける上の直線の写像は、3重に折れ込み、<sup>ある所で</sup> 第1葉目と第3葉目とが交叉する。この交叉点で物理面を第1葉目から第3葉目に切り貼るのである。第3章で示すように、交叉点の軌跡は衝撃に相当し、上の切り貼りは弱い衝撃波の条件---“弱い衝撃波を横切って  $\omega_+$  或は  $\omega_-$  が不変に保たれる”---を満足する。

### 第3章 衝撃条件

磁場が流れに平行な場合の衝撃条件は次のようになる（文献8）：

$$(30) \quad \overline{P}_1 \overline{U}_1 \sin \beta_1 = \overline{P}_2 \overline{U}_2 \sin \beta_2 ,$$

$$(31) \quad \overline{B}_1 \sin \beta_1 = \overline{B}_2 \sin \beta_2 ,$$

$$(32) \quad \bar{P}_1 + \bar{P}_1 \bar{U}_1^2 \sin^2 \beta_1 + (\gamma \bar{\mu})^{-1} \cdot \bar{B}_1^2 \cos^2 \beta_1 \\ = \bar{P}_2 + \bar{P}_2 \bar{U}_2^2 \sin^2 \beta_2 + (\gamma \bar{\mu})^{-1} \cdot \bar{B}_2^2 \cos^2 \beta_2 ,$$

$$(33) \quad (\bar{P}_1 \bar{U}_1^2 - \frac{\bar{B}_1^2}{\bar{\mu}}) \sin \beta_1 \cos \beta_1 = (\bar{P}_2 \bar{U}_2^2 - \frac{\bar{B}_2^2}{\bar{\mu}}) \sin \beta_2 \cos \beta_2 ,$$

$$(34) \quad \frac{\bar{U}_1^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\bar{P}_1}{\bar{\rho}_1} = \frac{\bar{U}_2^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\bar{P}_2}{\bar{\rho}_2} ,$$

但し、衝撃波附近の流れ模様は図10に示してある。上式で、 $\bar{U}$ 及び $\bar{B}$ は夫々速度及び磁場の絶対値、文字の上の $-$ 、添字1及び2は次元のある元の物理量、衝撃波の前面及び後面を表わす。また、密度及び圧力等には通常の記号を用いている。

(30) と (31) に (8) を代入し、図11及び12を考慮して整理すると

$$(35) \quad B_{r2} = \alpha \rho_2 U_{r2}, \quad B_{\theta 2} = -\alpha \rho_2 N_2 r,$$

を得るが、之は、既に注意したように、係数 $\alpha$ が衝撃波を横切つて不変である事を示している。(8)を(34)に代入して少し計算すると、(14)を積分する際の積分常数も衝撃波を横切つて不変である事が解る。また、(32)及び(34)は、我々の基本仮定の下では次のように近似される：

$$(36) \quad \left[ \rho \left\{ U_r^2 \cos^2 \theta - U_r N_2 r \sin \theta \cos \theta + \frac{\rho \alpha^2 N_2^2 r^2}{\gamma M_A^2} \cos^2 \theta \right\} \right]_1^2 = 0 ,$$



$$(37) \left[ \frac{U_r^2}{2} - N_1 N_2 r U_f + \frac{\gamma}{M^2(\gamma-1)} \cdot \frac{p}{\rho} \right]_+^2 = 0.$$

但し  $[ ]_+^2$  はカッコ内の量の衝撃波前後での跳びを表わす。

(36) 及び (37) は近似された基礎式；(1) 及び (16) を衝撃波を横切って積分しても得られる。之等を少し変形すると

$$(38) (\hat{U}_{r1} - \hat{U}_{r2})^2 = \frac{\hat{M}^2 (\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2) (\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)^2}{2 \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2},$$

$$(39) \tan \theta = \frac{\hat{\rho}_1 \hat{U}_{r1} - \hat{\rho}_2 \hat{U}_{r2}}{N_2 r (\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)}$$

を得る。

弱い衝撃波については、

$$(40) \hat{U}_{r2} = \hat{U}_{r1} (1 + \varepsilon), \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

$$(41) \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 (1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots),$$

の展開を (38) に代入すると、

$$(42) \alpha_1 = \frac{\hat{U}_{r1}}{\hat{M} \hat{\rho}_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2}{4},$$

を得る。上の関係を  $\omega_+$  及び  $\omega_-$  の定義に代入すると、既に述べた弱い衝撃波に対する条件を得る：

$$(43) \text{弱い衝撃波を横切っては、}\omega_+ \text{或は}\omega_- \text{が不変である。}$$

#### 第4章 QRHの漸近解

既に述べたように、 $\gamma$  が 1 の程度であれば、この論文の

基礎式はQRH近似(Quasi-Radial-Hypervelocity 近似)の式に等しくなる。この事を詳しく調べて見よう。

(10), (17), (20) の関係により、特性面に於ける初期曲線は直線;  $\omega_+ = \omega_-$  の近くにある。新しい変数

$$(44) \quad \omega_+ = \omega_- + \omega_+, \quad \omega_- = \omega_- - \omega_+,$$

を導入すると、(23) は次のようになる:

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial \omega_-} \left( \omega_-^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_-} \right) = \omega_-^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_+^2},$$

変数  $\omega_-$  についての微分が  $\omega_+$  についての微分よりもはるかに大きいと仮定し、展開式:

$$(46) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \quad |\varphi_0| \gg |\varphi_1| \gg \dots$$

を代入すると、(45) は次のようになる:

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial \omega_-} \left( \omega_-^3 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \omega_-} \right) = 0,$$

$$(48) \quad \frac{\partial}{\partial \omega_-} \left( \omega_-^3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial \omega_-} \right) = \omega_-^3 \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial \omega_+^2}, \quad (n \geq 1)$$

上の式の解は次のようになる:

$$(49) \quad \varphi - \varphi_{ow} = \frac{f_{00}}{\omega_0^2} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\omega_-^2} - 1 \right\} + \frac{f_{00}''}{2} \ln \frac{\omega_-}{\omega_0} + \dots,$$

$$(50) \quad 4N_2(r - r_{ow}) = -2\omega_+(\varphi - \varphi_{ow}) + f_{00}' \ln \frac{\omega_-}{\omega_0} + \dots,$$

但し  $\dot{\gamma}_{00} = -\omega_0^2 \omega_+ \gamma'_{0\omega}$ 、

上で  $\omega_0$  は  $\omega$  の初期値 (ここでは一定である。)、 $\gamma_{0\omega}$  及び  $\gamma_{0\omega}$  ( $=1$ ) は夫々  $\gamma$  及び  $\gamma$  の初期値で、 $\dot{\gamma}_{00}$  につけた ' は  $\omega_+$  についての微分である。

(49) 及び (50) の右边第1項は Q R H 解である。之等から、直線:  $\omega_+ = \omega_-$  (つまり  $\omega = 0$ ) が物理面での無限遠に相当する事が解る。また、上の漸近解は膨脹側では到る所で、圧縮側でも初期曲線の近くで良い近似である。

## 第5章 結果

第2章で述べた解法により初期条件 (25) について求めた流れを図13, 14, 15に示す。但し、計算には、観測に基づいて、次のようなパラメター値を用いた:

$$\gamma = \frac{5}{3}, N_2 = 0.15, M_A^{-1} = 0.14, M^{-1} = 0.14,$$

$$\alpha = 1.0, U_0 = 1.5, U_1 = 0.5, \zeta_0 = 0.09.$$

図13は物理面に於ける内向き及び外向きの衝撃波を示す。興味のある事は、この2つの衝撃波が夫々の出発点から始まっている事である。この事は既に Siscoe が定性的に (文献9) 予測し、Whang 及び Chien が数値的特性曲線<sup>法</sup>の特性曲線の集まり具合から (文献10) 結論した事と一致している。しかし、ここでのようにはっきりと衝撃波の位置を示したのは之が始めてである。既に出した図3は図13の衝撃波に附随した流れ

模様の想像図である。この図から解るように流線の中には等エントロピー的な圧縮を受けるものがあるが、そのような事は通常の気体流れでもよく見られる。図14は図13の衝撃波を特性曲面に写像したものを示す。この写像は数値的に求めたものであるが、第二章に於ける考察の結果と定性的によく一致している。

図15は速度分布及び密度分布の $r$ についての変化を示す。この図にはQRH近似の結果を点線で示してある。QRH近似は衝撃波の附近を除けば新しい結果とよく一致している。また、QRH近似が物理的に許されないような結果を導く所では、新しい扱いが威力を発揮して衝撃波での跳びを与えてくれる。

おわりに、

以上により経度依存性太陽風の逆解法として解析的特性曲線法の議論を終える。この方法には適用限界があり衝撃波が強くなると急激に精度が悪くなるが、その点さえ考慮すれば太陽風の流れ模様を理解する為の有効な手段を与えてくれる。

終りになってしまったが、この研究を進めるに当って助言を与えて下さった林忠四郎教授、肥田金三教授、久保昇三博士に感謝する。

## 文献

1. Hundhausen, A.J., 1972. Coronal expansion and solar wind, Springer-Verlag
2. Gosling, J.T., Hundhausen, A.J. and Bame, S.J., 1976. J. Geophys. Res., 81, 2111
3. Pizzo, V., 1978. J. Geophys. Res., 83, 5563
4. Sakurai, T., 1971. Cosmic Electrodynamics, 1, 460
5. Oswatitsch, K., 1962. Z. für Flugwiss., 10, 130
6. Sommerfeld, A., 1949. Partial differential equations in physics, Section 11, 52, Academic Press
7. Guderley, K.G., 1962. The theory of transonic flow, Chapter V, 73, Pergamon
8. Hida, K., 1963. J. Phys. Soc. Japan, 18, 864
9. Siscoe, G.L., 1976. J. Geophys. Res., 81, 6235
10. Whang, Y.C. and Chien, T.H., 1981. J. Geophys. Res., 86, 3263

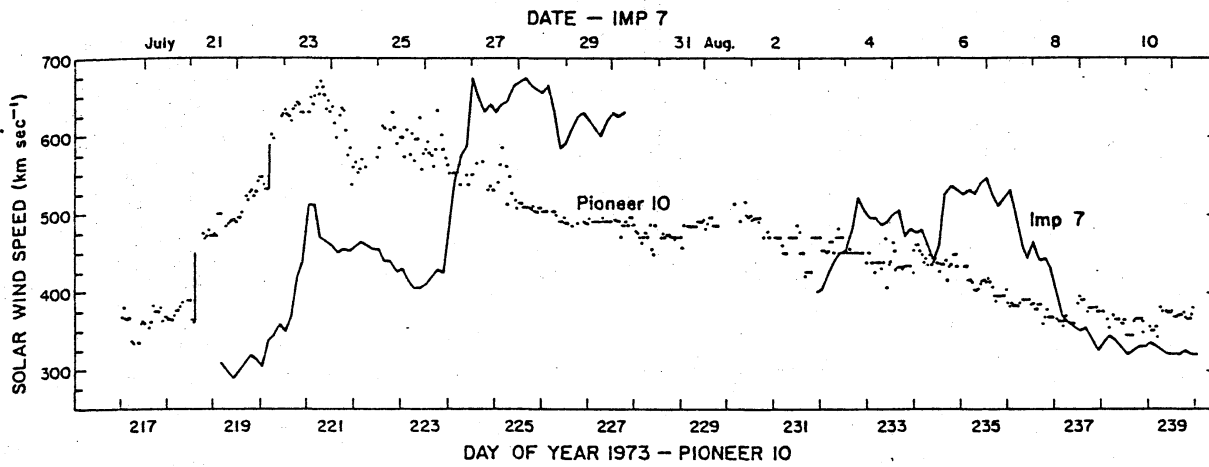


図 1

地球附近の人工衛星 (Imp 7) と 4.5 天文単位 (太陽と地球の平均距離を 1 とする長さの単位) に於ける人工衛星 (Pioneer 10) の観測。

Pioneer 10 の観測には衝撃波に相当する跳びが見られる。

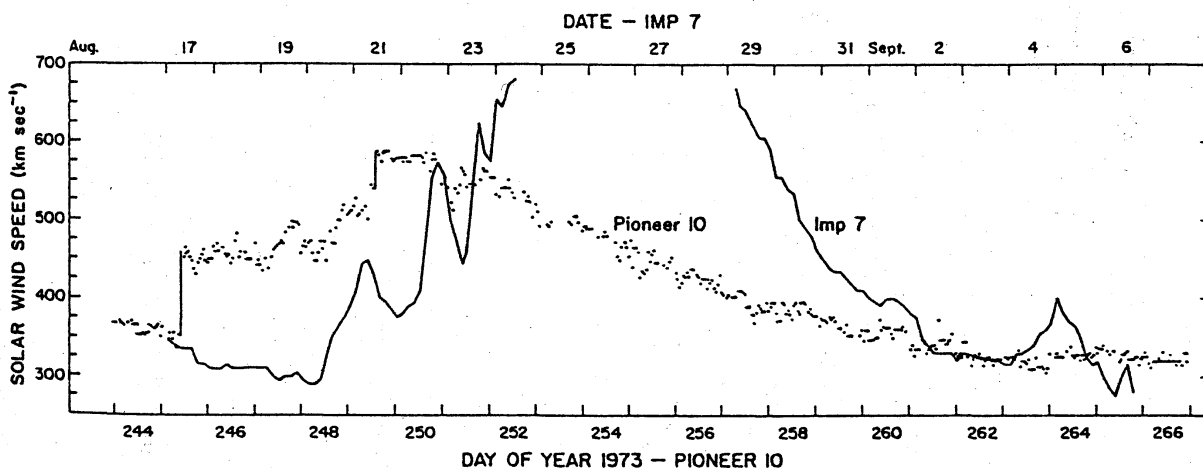


図 2

図 1 と同様の観測。

図 1 とはほぼ太陽 1 回転分 (約 27 日) だけ日かずれている。

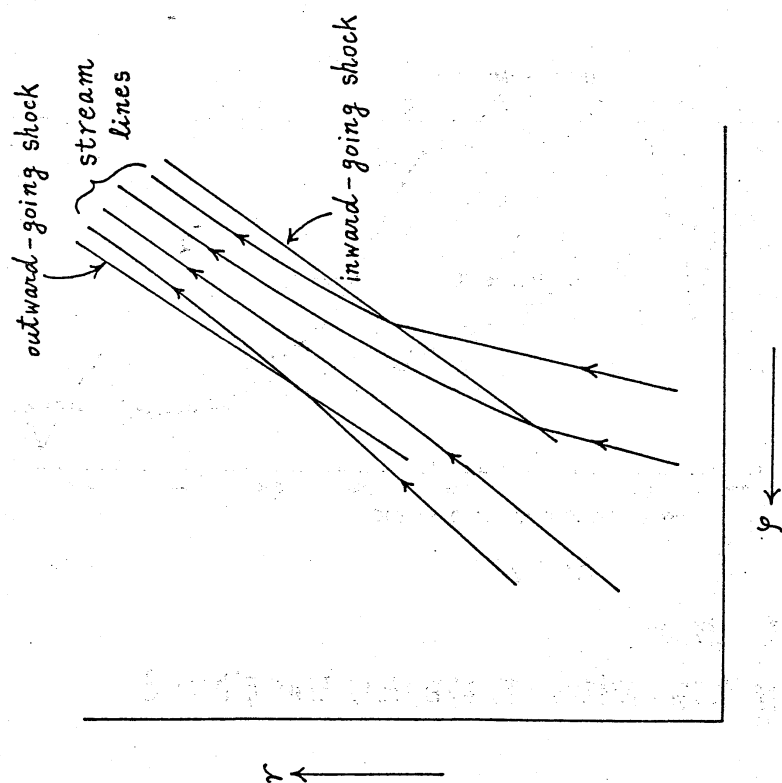


図 3

衝撃波附近の流れ模様

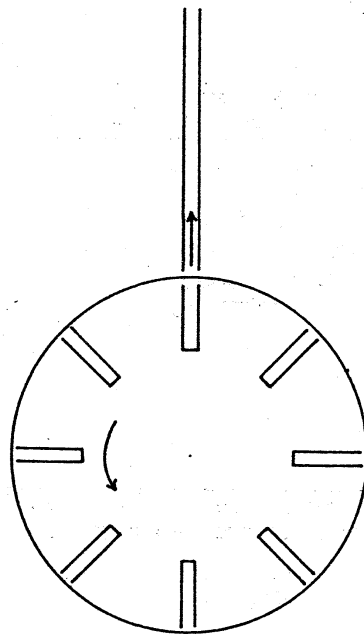


図 4

回転円盤上に性能の異なる空気発射銃を多数並べる。各空気銃は半無限流路と正対した時に発射する。流路の中には本文で説明するような事が起る。

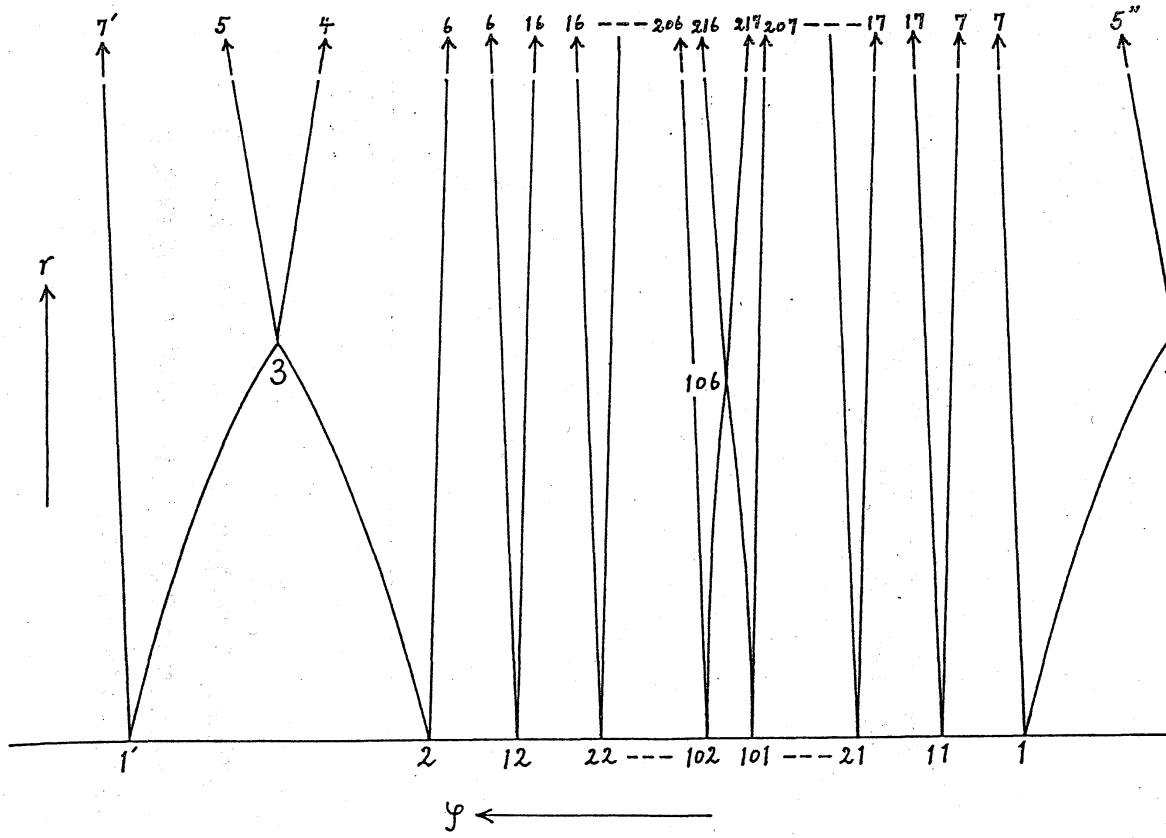


図 6

物理面  $(\varphi, r)$  に於ける特性曲線の網目

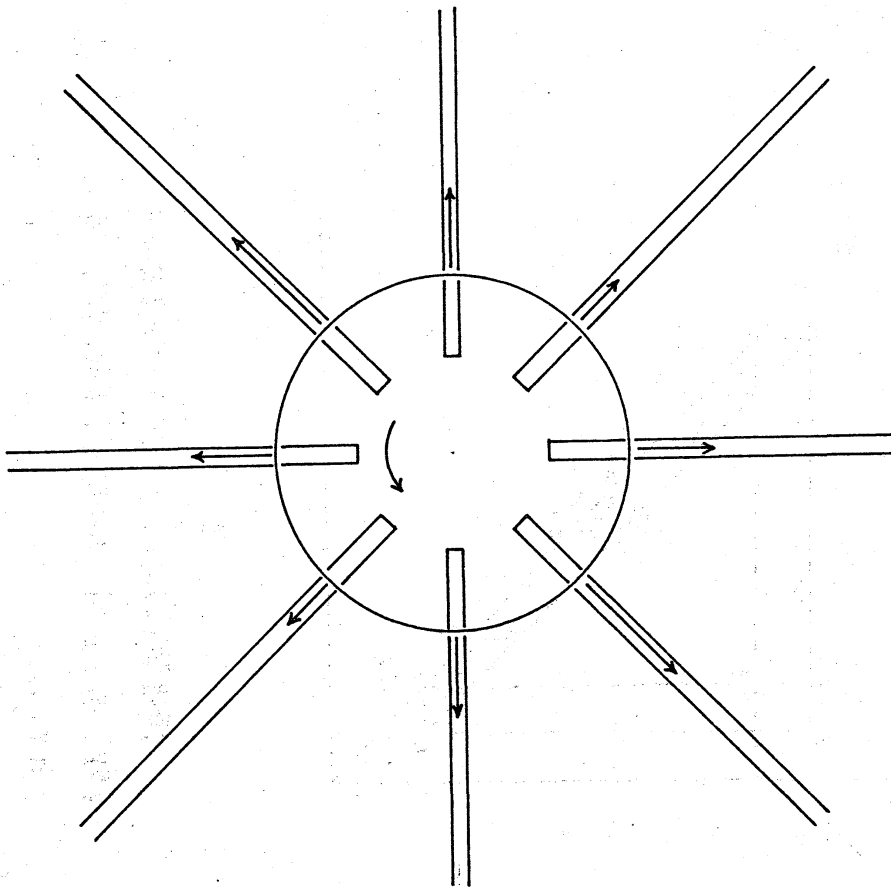


図 5

図4の流路を多数並べた場合、各流路に起る事は  
図4の場合と同様である。円盤の回転につれて各流路の  
出来事も“回転”する。



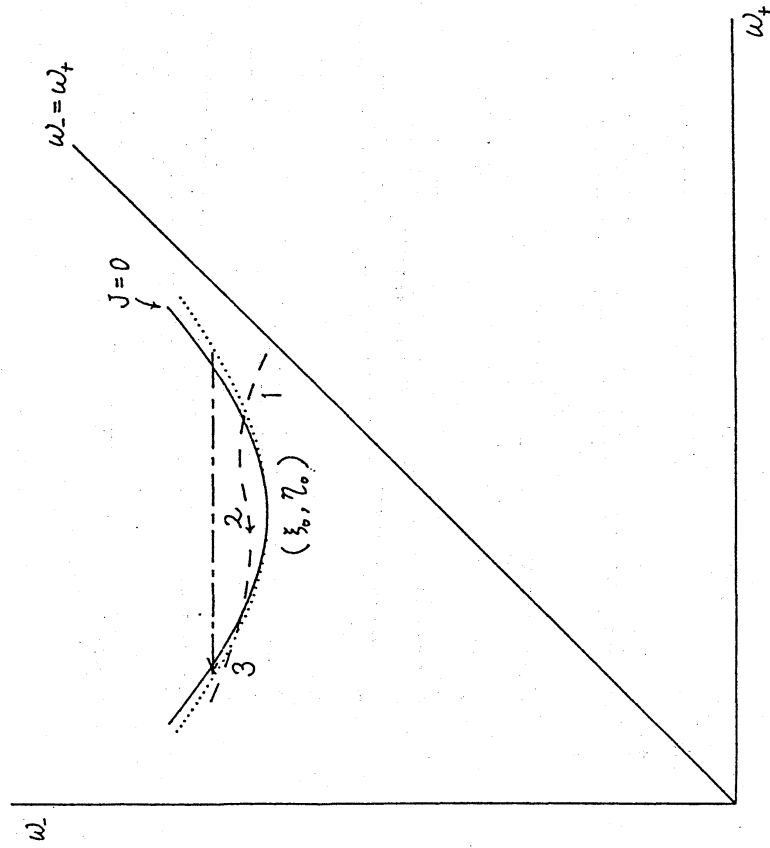


図 8

特性面に於ける特異線:  $J=0$  の近傍. 矢印のついたダッシュ線は流線, 点線は衝撃波, 一点鎖線は衝撃波での跳びを示す.

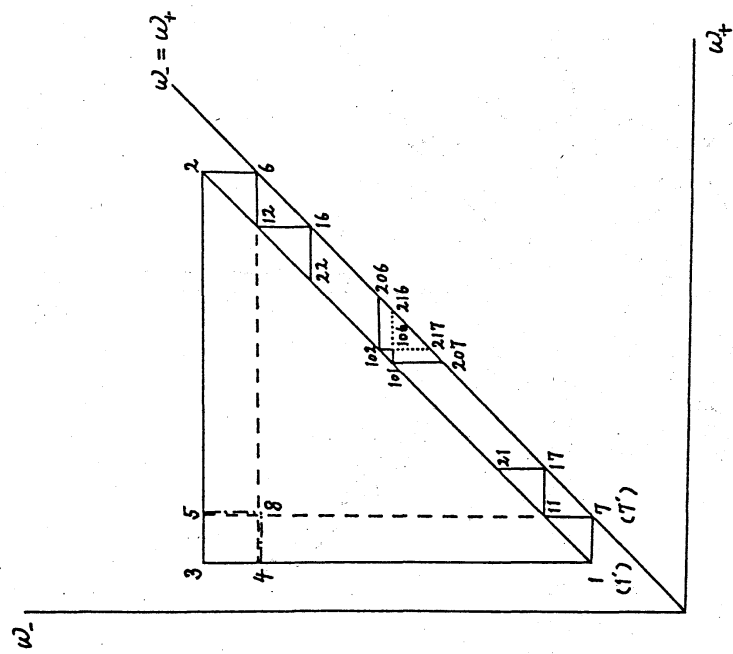


図 7

特性面  $(\omega_+, \omega_-)$  に於ける特性曲線の網目. 図 6 と図 7 の対応点はいずれも数字で示されている.

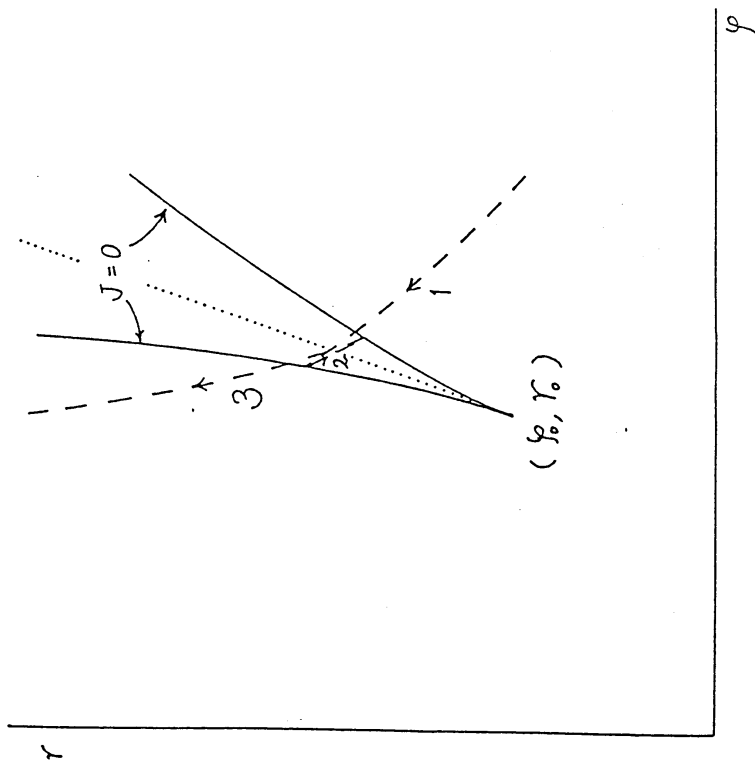


図 9

物理面に於ける特異線： $J=0$ の近傍。  
ダッシュ線等は図8と同じ意味を持つ。

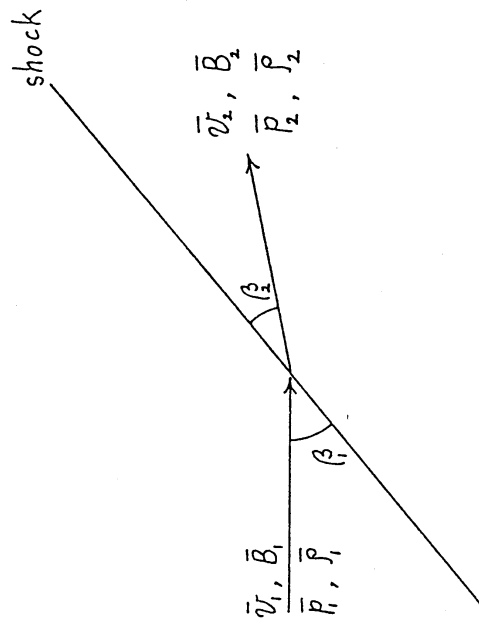


図 10

衝撃波前後の状態

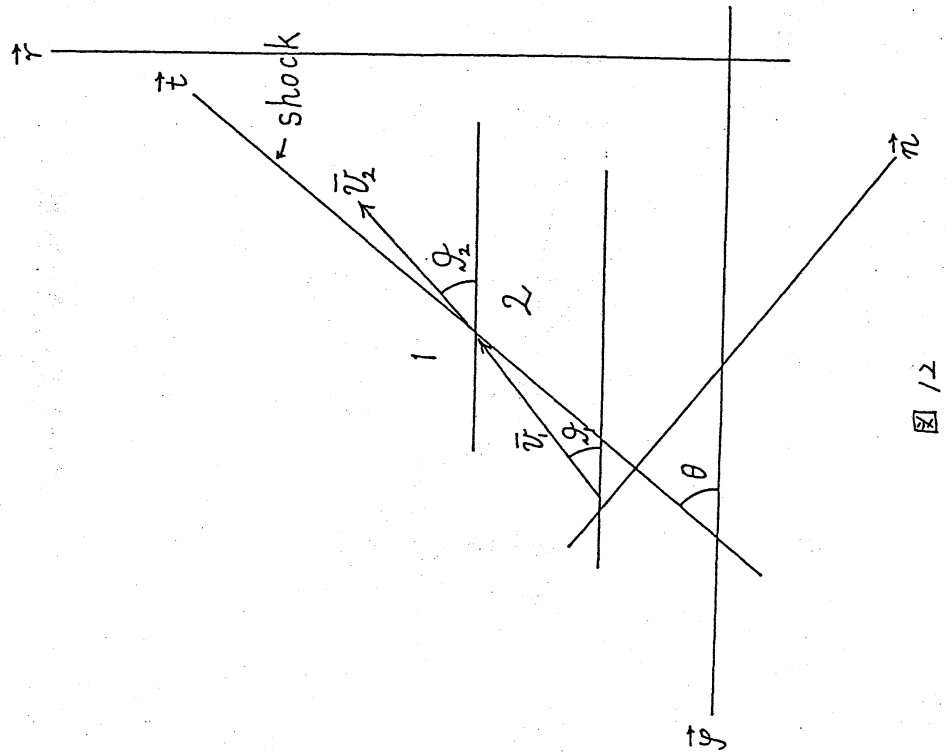


図 12

外向き衝撃波前後の状態

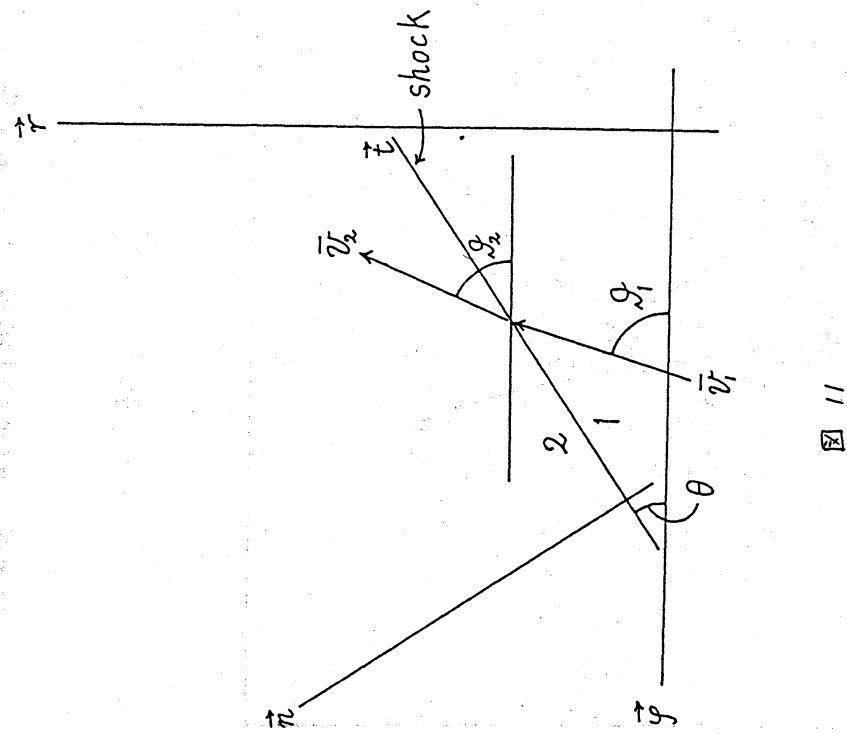


図 11

内向き衝撃波前後の状態

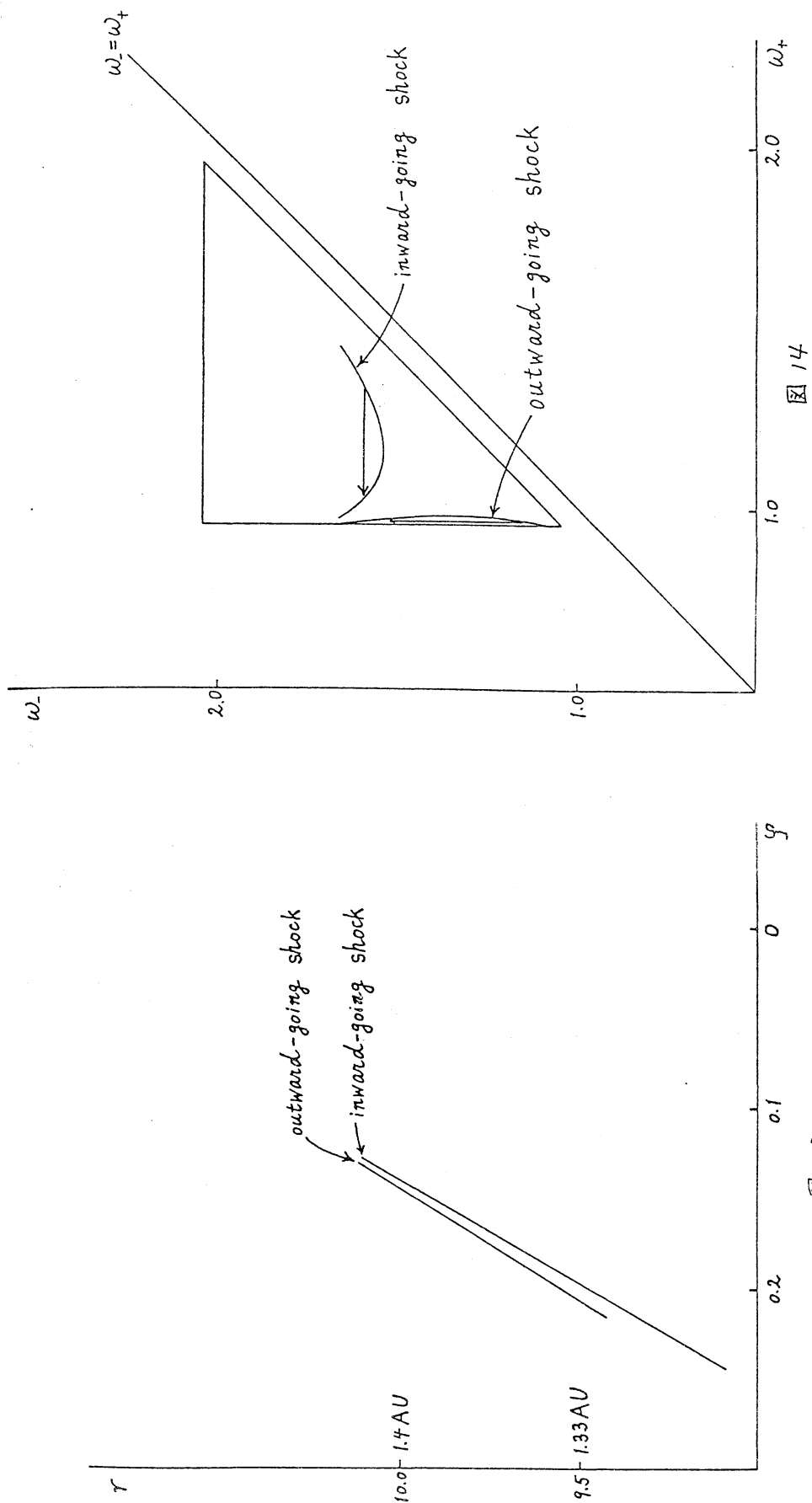


図 13

物理面に於ける衝撃波の組

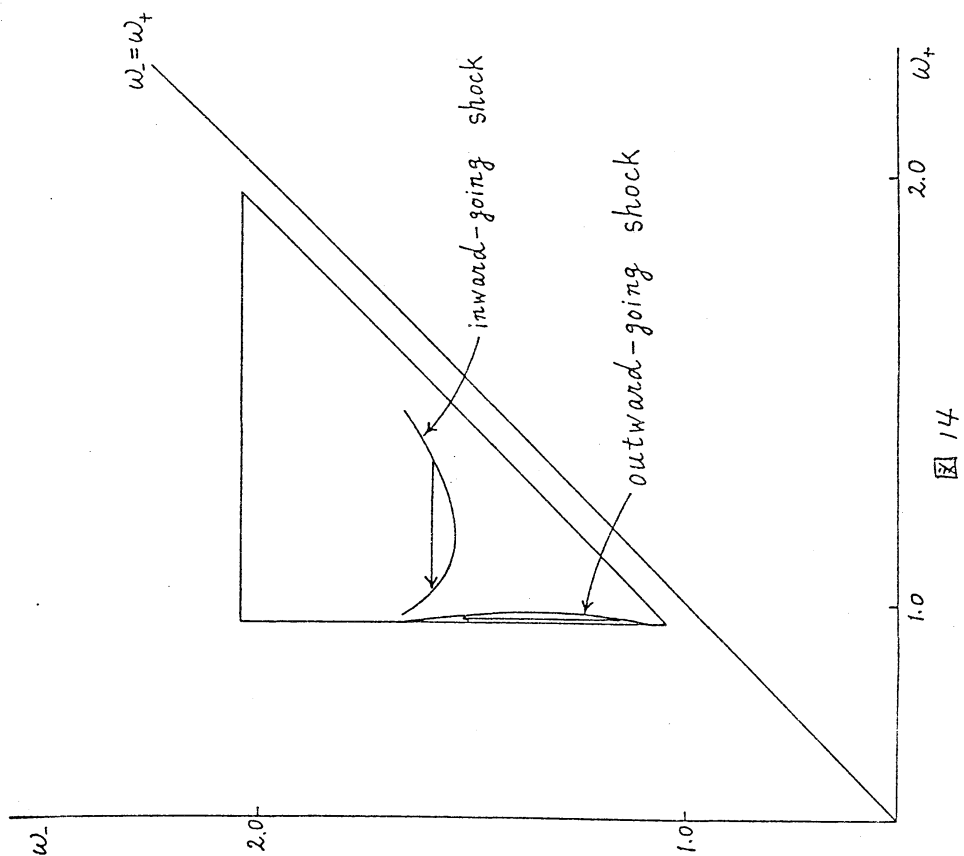


図 14

特性面に於ける衝撃波の組。

矢印は衝撃波を横切りの跳びを示す。

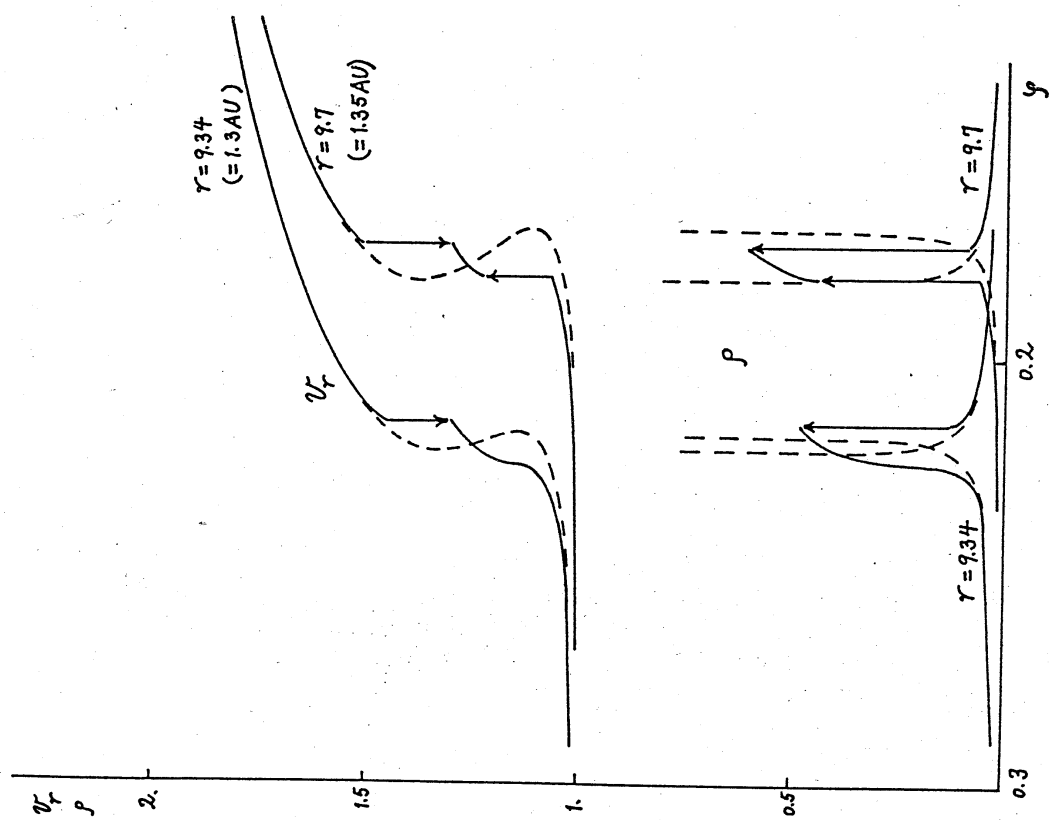


図 15

流れ模様の变化